9/3/2017

Κριτήριο λόγου απόδειξη (β)

Αν $\ell > 1$, $\exists\, n_0 \in \mathbb{N}: \left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| > x > 1 \ \forall k \geq n_0$
Εφαρμόζοντας τον ορισμό του ορίου της ακολουθίας $\varepsilon = \ell - x > 0$
Έτσι για κάθε $k \geq k_0$ $|a_{k+1}| \geq |a_k|$ και άρα (όπως προκύπτει επαγωγικά) $|a_k| \geq |a_{k_0}| \ \forall k \geq k_0$.
Άρα $a_k \not\to 0$ και άρα η σειρά $\sum_{k=1} a_k$ αποκλίνει

Παραδείγματα:

1) $\sum_{k=0} \frac{1}{k!}$, $a_k = \frac{1}{k!}$, $\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| = \frac{k!}{(k+1)!} = \frac{1}{k+1} \to 0 < 1$

Άρα η σειρά συγκλίνει.

2) $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(k!)^2}{(2k)!}$, $a_k = \frac{(k!)^2}{(2k)!}$, $\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| = \frac{((k+1)!)^2 \cdot (2k)!}{(2(k+1))!\,(k!)^2} =$

$= \frac{(k+1)!\,(k+1)!\,(2k)!}{(2k+2)!\,k!\,k!} = \frac{(k+1)(k+1)(2k)!}{(2k)!\,(2k+1)(2k+2)} = \frac{k^2+2k+1}{4k^2+6k+2} \to \frac{1}{4} < 1$

Άρα η σειρά συγκλίνει.

3) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2^k k!}{k^k}$, $a_k = \frac{2^k k!}{k^k}$, $\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| = \frac{\frac{2^{k+1}(k+1)!}{(k+1)^{k+1}}}{\frac{2^k k!}{k^k}} =$

$= \frac{2^{k+1}(k+1)!\cdot k^k}{2^k\, k!\,(k+1)^{k+1}} = \frac{2(k+1)\cdot k^k}{(k+1)(k+1)^k} = \frac{2k^k}{(k+1)^k} = \frac{2}{\frac{(k+1)^k}{k^k}} = \frac{2}{(1+\frac{1}{k})^k} \to \frac{2}{e} < 1$

Άρα η σειρά συγκλίνει.

4) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{3^k \cdot k!}{k^k}$, $b_k = \frac{3^k \cdot k!}{k^k}$, ομοίως $\left|\frac{b_{k+1}}{b_k}\right| \to \frac{3}{e} > 1$.

Άρα η σειρά αποκλίνει.

• Έχουμε ορίσει ότι $e = \lim a_n$ όπου $a_n = (1+\frac{1}{n})^n$ και είδαμε ότι η σειρά $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}$ είναι συγκλίνουσα

Πρόταση: $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} = e$

Απόδειξη:

Θέτουμε $s_n = 1 + \frac{1}{1!} + \dots + \frac{1}{n!}$ $\forall n \in \mathbb{N}$ (s_n αύξουσα και άνω φραγμένη)

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \left(\frac{1}{n}\right)^k \cdot 1^{n-k} =$$

$$= 1 + \frac{n}{1!}\frac{1}{n} + \frac{n(n-1)}{2!}\cdot\frac{1}{n^2} + \dots + \frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{k!}\cdot\frac{1}{n^k} + \dots +$$

$$+ \frac{n(n-1)\dots 2\cdot 1}{n!}\cdot\frac{1}{n^n} =$$

$$= 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{n}\right) + \dots + \frac{1}{k!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\dots\left(1-\frac{k-1}{n}\right) + \dots +$$

$$+ \frac{1}{n!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\dots\left(1-\frac{n-1}{n}\right) \quad (*)$$

Από την ισότητα προκύπτει: $a_n \le 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{k!} + \dots + \frac{1}{n!} = s_n$

Από την (*) $\forall n > k$: $(1+\frac{1}{n})^n \ge 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!}(1-\frac{1}{n}) + \dots + \frac{1}{k!}(1-\frac{1}{n}) \dots (1-\frac{k-1}{n})$

$e \ge s_n \ \forall k \in \mathbb{N}$

και κρατώντας σταθερό το k και παίρνοντας όριο και στα δύο μέλη για $n \to +\infty$: $\lim(1+\frac{1}{n})^n \ge 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \dots + \frac{1}{k!}$

Εφόσον s_n αύξουσα με α.φ. το e προκύπτει ότι $\lim s_n \le e$. Εφόσον όπως δείξαμε $a_n \le s_n$ $\forall n \Rightarrow$

$\Rightarrow \lim a_n \le \lim s_n \Rightarrow e \le \lim s_n$

Επομένως $e = \lim s_n = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}$

Θεώρημα: Ο αριθμός e είναι άρρητος.

Απόδειξη:

Υποθέτουμε (προς απαγωγή σε άτοπο) ότι ο e είναι ρητός $e = \frac{m}{n}$ με $m, n \in \mathbb{N}$. Τότε $\frac{m}{n} = e = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}$

$$\frac{m}{n} = \left(1 + \frac{1}{1!} + \dots + \frac{1}{n!}\right) + \left(\frac{1}{(n+1)!} + \frac{1}{(n+2)!} + \dots + \frac{1}{(n+\lambda)!} + \dots\right) =$$

Πολλαπλασιάζοντας και τα δύο μέρη με $n!$

$$\Rightarrow n!\left(\frac{m}{n} - \left(1 + \frac{1}{1!} + \dots + \frac{1}{n!}\right)\right) = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} + \dots + \frac{1}{(n+1)\dots(n+\lambda)} + \dots$$

Ο αριθμός $N = n!\left(\frac{m}{n} - \left(1 + \frac{1}{1!} + \dots + \frac{1}{n!}\right)\right)$ είναι θετικός ακέραιος, άρα φυσικός αριθμός.

$$\left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} + \dots + \frac{1}{(n+1)\dots(n+\lambda)} + \dots\right) \leq \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{2^3} + \dots + \frac{1}{2^\lambda} + \dots =$$

$$= \left(\frac{1}{6} - \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots\right) = -\frac{1}{12} + 1 = \frac{11}{12}$$

Έτσι $N \in \mathbb{N}$ με $0 < N \leq \frac{11}{12}$ άτοπο!

Οπότε e άρρητος.

Θεώρημα: (Κριτήριο ρίζας του Cauchy)

Έστω $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ ώστε να $\exists$ το όριο $\ell = \lim \sqrt[k]{|a_k|}$ $(0 \leq \ell \leq +\infty)$

a) Αν $\ell < 1$ τότε η $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ συγκλίνει απόλυτα

b) Αν $\ell > 1$ τότε η $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ αποκλίνει.

Απόδειξη:

a) Αν $\ell < 1$, επιλέγουμε x με $\ell < x < 1$ εφαρμόζοντας τον ορισμό του ορίου για $\varepsilon = x - \ell > 0$, προκύπτει ότι $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε $\forall k \geq n_0$ να ισχύει $\sqrt[k]{|a_k|} < \ell + \varepsilon = x$ και άρα $\forall k \geq n_0$ $|a_k| < x^k$. Η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} x^k$ συγκλίνει (εφόσον $0 < x < 1$), άρα συγκλίνει και η $\sum_{k=n_0}^{\infty} x^k$ και συνεπάγεται ότι $\sum_{k=n_0}^{\infty} a_k$ συγκλίνει $\Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$ συγκλίνει β) Αν $\ell = \lim \sqrt[k]{|a_k|} > 1$, επιλέγουμε x με $1 < x < \ell$

Θέτουμε $\varepsilon = \ell - x > 0$ και $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε

$\sqrt[k]{|a_k|} > \ell - \varepsilon = x > 1 \quad \forall k \geq n_0 \Rightarrow |a_k| > 1 \quad \forall k \geq n_0 \Rightarrow a_k \not\to 0$

Άρα η $\sum a_k$ αποκλίνει

Παρατήρηση: Το κριτήριο λόγου και το κριτήριο ρίζας δεν δίνουν συμπέρασμα όταν $\ell = 1$

Παράδειγμα:

- $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$, $a_k = \frac{1}{k}$, $\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| \to 1$, $\sqrt[k]{|a_k|} = \sqrt[k]{\frac{1}{k}} = \frac{1}{\sqrt[k]{k}} \to 1$ αποκλίνει
- $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$, $b_k = \frac{1}{k^2}$, $\left|\frac{b_{k+1}}{b_k}\right| \to 1$, $\sqrt[k]{|b_k|} = \sqrt[k]{\frac{1}{k^2}} = \frac{1}{\sqrt[k]{k^2}} \to 1$ συγκλίνει

Παράδειγμα: Για ποια x συγκλίνει η $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k^2}$?

Θα εφαρμόσουμε το κριτήριο ρίζας

$a_k = \frac{x^k}{k^2}$

$$\sqrt[k]{|a_k|} = \frac{|x|}{(\sqrt[k]{k})^2} \to |x|$$

Για $-1 < x < 1$: η σειρά συγκλίνει.

Για $x > 1$ ή $x < -1$: η σειρά αποκλίνει.

Για $x = 1$: $\sum \frac{1}{k^2}$ συγκλίνει

Για $x = -1$: $\sum \frac{(-1)^k}{k^2}$ συγκλίνει απόλυτα άρα συγκλίνει.

Θεώρημα (Κριτήριο Leibnitz)

Έστω $(b_k)_{k \in \mathbb{N}}$ φθίνουσα ακολουθία με $b_k \to 0$ $(b_1 \geq b_2 \geq \dots \geq b_k)$

Τότε η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} b_k$ συγκλίνει.

Παράδειγμα: Νδο η $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{\sqrt{k}}$ συγκλίνει.

Η ακολουθία $a_k = \frac{1}{\sqrt{k}}$ είναι φθίνουσα (εφόσον $\frac{1}{\sqrt{k}} > \frac{1}{\sqrt{k+1}} \quad \forall k$)

και $a_k \to 0$

Επομένως η $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{v} \cdot \frac{1}{\sqrt{k}}$ συγκλίνει σύμφωνα με το

θεώρημα Leibnitz.